

"Was man weiß, was man wissen sollte"
- Checkliste zur MAI2-Vorlesung SS 2006 -

(1) Vektorräume über einem Körper (vorzugsweise \mathbb{R})

- lineare Operationen (Vektoraddition, Multiplikation mit Skalaren)
- Rechenregeln dafür
- reelle Standardvektorräume \mathbb{R}^n
 - Zeilen- und Spaltenschreibweise (n-Tupel)
 - komponentenweises Rechnen
 - Anschauung: Punkte des Raums / Ortsvektoren / freie Vektoren

(2) Länge eines Vektors

- Berechnung über $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$
- elementare Eigenschaften, Rechenregeln

(3) Skalarprodukt

- Berechnung über $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$
- Rechenregeln (kommutativ, distributiv, ...)
- wichtige Eigenschaften:
 - Orthogonalitätstest $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 - Hilfsmittel zur Längenberechnung $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
 - Hilfsmittel zur Winkelberechnung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \gamma$
 - Hilfsmittel zur Komponentenerlegung

(4) Geradengleichungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

- Punkt-Richtungs-Form (Parameterform)
- Zwei-Punkte-Form
- Hessesche Normalenform (nur im \mathbb{R}^2 !)

(5) Ebenengleichungen im \mathbb{R}^3

- Parameterform
- Drei-Punkte-Form
- Hessesche Normalenform

(6) Geometrische Anwendungen

- Tests, ob Punkt auf einer Geraden liegt, zwei Geraden parallel sind etc.
- Schnittmengen-Ermittlung (2 Geraden, Gerade und Ebene, 2 Ebenen etc.)
- Berechnung von "Normalen" und Abständen

(7) Linearkombinationen

- Definition, lineares Erzeugnis ("Span")
- konvexe Kombinationen
- lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

(8) Matrizen

- Definition, Schreibweisen
- Begriffe (transponiert, quadratisch, ...)
- Rechenregeln, insbesondere Matrizenmultiplikation
 - nicht kommutativ, Nullteiler möglich
- Einheitsmatrix, inverse Matrix

(9) Lineare Abbildungen

- Definition, Beispiele (Drehungen, Spiegelungen, Streckungen, ...)
- Beschreibung durch Matrizen
- Hintereinanderschaltung (Verkettung)
- affine Abbildungen

(10) Determinanten

- nur für quadratische Matrizen
- Rechenregeln und Berechnungsverfahren
 - Formeln ("Merkregeln") für $n = 2$ und $n = 3$
 - "Entwickeln" nach einer Zeile oder Spalte
 - "zulässige" Umformungen \rightarrow Dreiecks- oder Diagonalgestalt
- Bedeutung
 - (n-dim.) Volumen / Verzerrungsfaktor der Abbildung
 - Test auf lineare Abhängigkeit
 - Lösung linearer Gleichungssysteme (Cramersche Regel)

(11) Vektorprodukt

- Definition und Berechnung ("Merkregel" über formale Determinante)
- Rechenregeln (antikommutativ!)
- wichtigste Eigenschaften:
 - Orthogonalität $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$
 - $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ "Rechtssystem"
 - $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \gamma|$ (Flächeninhalt Parallelogramm)
 - Volumen eines "Spats" über Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

(12) Lineare Gleichungssysteme

- Definition, Matrixschreibweise
- Begriffe (Koeffizientenmatrix, Inhomogenität, ...)
- Lösungsmenge (keine Lösung / eindeutige Lösung / Lösungsschar)
- Lösungsverfahren:
 - Cramersche Regel
 - Gauß-Algorithmus (einfache Fälle)
 - [in einfachen Fällen auch "unsystematisches" Eliminieren (Schulmathematik)]

(13) Folgen und Grenzwerte

- Definitionen (Folge, Konvergenz)
- Begriffe (Divergenz, "bestimmte" Divergenz, Monotonie, Beschränktheit, ...)
- Monotonie-Kriterium
- konkrete Ermittlung von Grenzwerten
 - Zurückführung auf bekannte Grenzwerte (Rechenregeln für konvergente Folgen)
 - "inspiriertes Raten" und ggf. Beweis (z. B. bei rekursiven Folgen)

(14) Exponentialfunktion

- Grenzwertdarstellungen für e und e^x
- Potenzreihe für e^x , speziell: $e^x \approx 1 + x$ für $x \approx 0$
- elementare Eigenschaften der Funktionen e^x und $\ln x$ (Skizzen!)

(15) Winkelfunktionen

- elementare Trigonometrie (am rechtwinkligen Dreieck)
- Winkelmessung im Bogenmaß
- Potenzreihen für $\sin x$ und $\cos x$ (ggf. über komplexe Exponentialfunktion)
- Tabelle der wichtigsten Werte, Skizzen!